Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ

ВЫПУКЛАЯ ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ ОБОЛОЧКА МНОЖЕСТВА ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© А.И. Булгаков, О.П. Беляева

Здесь вводится понятие выпуклой по переключению оболочки множества, принадлежащего пространству суммируемых функций. Исследуются свойства этой оболочки. Рассматривается многозначное отображение, значения которого принадлежат пространству суммируемых функций и, вообще говоря, не обладают свойством выпуклости по переключению. По этому отображению строится «овыпукленное» по переключению отображение. Изучаются топологические свойства такого отображения.

Пусть R^n - n-мерное пространство вектор-столбцов, с нормой $|\cdot|$, $C^n[a,b]$ – пространство непрерывных функций $x\ :\ [a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]}=\max\{|x(t)|\ :\ t\in[a,b]\}$, $\mathcal{U}\subset[a,b]$ - измеримое множество $\mu(\mathcal{U})>0$ (μ - мера Лебега), $L^n_p(\mathcal{U})$ ($L^n_\infty(\mathcal{U})$)- пространство суммируемых с p-ой степенью (измеримых ограниченных в существенном) функций $x\ :\ \mathcal{U}\to R^n$ с нормой $\|x\|_{L^n_p(\mathcal{U})}=\left(\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|^p ds\right)^{1/p}$ $\left(\|x\|_{L^n_\infty(\mathcal{U})}=\operatorname{vraisup}\limits_{s\in\mathcal{U}}|x(s)|\right)$.

Пусть $\Phi\subset L^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ ограничено суммируемой функцией, если существует такая функция $u\in L^1[a,b]$, что для всех $\varphi\in\Phi$ при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство $|\varphi(t)|\le u(t)$. Будем говорить, что множество Φ выпукло по переключению (разложимо), если для любых $x,y\in\Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x+\chi([a,b]\setminus\mathcal{U})y\in\Phi$, где $\chi(\cdot)$ - характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим $Q[L^n_1[a,b]]$ ($\Pi[L^n_1[a,b]]$) множество всех непустых замкнутых и ограниченных суммируемыми функциями (ограниченных замкнутых выпуклых по переключению) подмножеств пространства $L^n_1[a,b]$. Обозначим $2^{L^n_\infty(\mathcal{U})}$ - множество всех непустых ограниченных подмножеств пространства $L^n_\infty(\mathcal{U})$.

Определение. Пусть $\Phi\subset L^n_1[a,b]$. Обозначим через $\Pi\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y=\chi(\mathcal{U}_1)x_1+\chi(\mathcal{U}_2)x_2+\cdots+\chi(\mathcal{U}_m)x_m$$

элементов $x_i\in\Phi$, $i=1,2,\ldots,m$, в которых $\mathcal{U}_i\subset[a,b]$, $i=1,2,\ldots,m$, - непересекающиеся измеримые множества, удовлетворяющие условию $[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^m\mathcal{U}_i$. Обозначим через $\overline{\Pi}\Phi$ замыкание множества $\Pi\Phi$ в пространстве $L^n_1[a,b]$.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 1. *Для любого непустого множества* $\Phi\subset L^n_1[a,b]$ *множество* $\Pi\Phi$ *выпукло по переключению.*

Лемма 2. *Если множество* $\Phi\subset L^n_1[a,b]$ *выпукло по переключению, то* $\Pi\Phi=\Phi$.

Следствие. *Если* $\Phi\subset L^n_1[a,b]$, *то множество* $\Pi\Phi$ *– наименьшее выпуклое по переключению множество, содержащее множество* Φ.

Лемма 3. *Если множество* $\Phi\subset L^n_1[a,b]$ *выпукло, то множество* $\Pi\Phi$ *также выпукло в пространстве* $L^n_1[a,b]$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что если множество $\Phi \subset L_1^n[a,b]$ ограничено или слабо компактно, то множество $\Pi\Phi$, вообще говоря, может быть и не ограниченным и не слабо компактным множеством пространства $L_1^n[a,b]$. Это доказывает следующее равенство

$$\Pi[B_{L_p^n[a,b]}[0,1]] = L_p^n[a,b] \quad (p \in [1,\infty)),$$

где $B_{L_p^n[a,b]}[0,1]$– открытый шар пространства $L_p^n[a,b]$ с центром в точке 0 и радиусом 1.

В то же время если Φ ограничено суммируемой функцией, то множество $\Pi\Phi$ также ограничено этой суммируемой функцией.

По аналогии с определением выпуклой оболочки в нормированном пространстве множество $\Pi\Phi$ будем называть *выпуклой по переключению оболочкой* множества Φ в пространстве суммируемых функций или просто *выпуклой по переключению оболочкой* множества Φ. Замыкание множества $\Pi\Phi$ в пространстве $L_1^n[a,b]$, которое обозначим $\overline{\Pi}\Phi$, будем называть *замкнутой выпуклой по переключению оболочкой* множества Φ.

Рассмотрим отображение $\Phi : C^n[a,b] \to Q[L_1^n[a,b]]$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$– измеримое множество. Отображение $\Phi_{\mathcal{U}} : C^n[a,b] \to Q[L_1^n[\mathcal{U}]]$ определим следующим образом: каждое значение $\Phi_{\mathcal{U}}(x)$ состоит из всех сужений на $\mathcal{U}$ функций множества $\Phi(x)$.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить (см.[1]), что *отображение $\Phi : C^n[a,b] \to Q[L_1^n[a,b]]$ непрерывно (полунепрерывно снизу, полунепрерывно сверху) аппроксимируется в $L_\infty^n[a,b]$ на множестве* $K \subset C^n[a,b]$, если для любого $\nu > 0$ существует такое измеримое множество $\mathcal{U}_\nu \subset [a,b]$, что выполняются условия: $\mu([a,b] \setminus \mathcal{U}_\nu) < \nu$; для любого $x \in K$ множество $\Phi_\nu(x) \in 2^{L_\infty^n(\mathcal{U}_\nu)}$; отображение $\Phi_\nu : K \to 2^{L_\infty^n(\mathcal{U}_\nu)}$ непрерывно по Хаусдорфу (полунепрерывно снизу, полунепрерывно сверху по Хаусдорфу), здесь $\Phi_\nu \equiv \Phi_{\mathcal{U}_\nu}$.

Далее, будем говорить, что отображение $\Phi : C^n[a,b] \to Q[L_1^n[a,b]]$ *ограничено суммируемой функцией на множестве* $K \subset C^n[a,b]$, если образ $\Phi(K)$ ограничен суммируемой функцией.

По заданному отображению $\Phi : C^n[a,b] \to Q[L_1^n[a,b]]$ определим многозначный оператор $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \Pi[L_1^n[a,b]]$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{\Pi}\Phi(x). \tag{1}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \Pi[L_1^n[a,b]]$ будем называть *«овыпукленным» по переключению отображением.*

Т е о р е м а. *Пусть отображение $\Phi : C^n[a,b] \to Q[L_1^n[a,b]]$ непрерывно (полунепрерывно снизу, полунепрерывно сверху) аппроксимируется в $L_\infty^n[a,b]$ и ограничено суммируемой функцией на каждом предкомпактном множестве из пространства $C^n[a,b]$. Тогда «овыпукленное» по переключению отображение $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \Pi[L_1^n[a,b]]$, определенное равенством (1), непрерывно (полунепрерывно снизу, полунепрерывно сверху) и ограничено суммируемой функцией на каждом предкомпактном множестве из пространства $C^n[a,b]$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И.* К вопросу существования непрерывных ветвей у многозначных отображений с невыпуклыми образами в пространствах суммируемых функций // Матем. сб. 1988. Т. 136. № 2. С. 292–300.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00324, Министерства образования и науки РФ, грант № Е02-1.0-212, НИР темплана 01.002.2.